Chapitre 6 : Orthogonalité et méthode des moindres carrés

6.1 Introduction et motivation

Dans la vie courante, nous sommes familiers avec la notion d'angle droit et de perpendicularité. En géométrie plane, deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle de 90 degrés. Cette notion intuitive peut être généralisée aux espaces de dimension supérieure grâce au concept de *produit scalaire*.

L'orthogonalité joue un rôle fondamental en algèbre linéaire car elle permet de :
— Simplifier considérablement les calculs avec des bases orthogonales
— Résoudre des problèmes d'approximation (méthode des moindres carrés)
— Décomposer des espaces vectoriels en sous-espaces orthogonaux
— Comprendre la géométrie des transformations linéaires

Rappel. Soit maintenant $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs quelconques. Comme $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ est une matrice de taille $n \times 1$ alors que $\overrightarrow{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ est une matrice de taille $1 \times n$, le produit matriciel $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}^T$ est une matrice de taille $n \times n$ et le produit matriciel $\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v}$ est une matrice de taille 1×1, autrement dit, un nombre réel.

6.2 Produit scalaire et norme

Définition 6.1 *Produit scalaire euclidien*

Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Le *produit scalaire euclidien* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

En notation matricielle, on peut aussi écrire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T\vec{v}$

Exemples. 1. Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 8 - 3 - 2 = 3$$

2. Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 + 0 - 1 - 2 = 0$$

Propriété 6.2 *Propriétés du produit scalaire*

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

Commutativité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Linéarité — $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

— $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

— $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$

Positivité $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$

Démonstration. — **Commutativité** On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n$.

Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a $u_i v_i = v_i u_i$ pour tout i, donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

— **Distributivité à gauche** $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^T \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}^T + \overrightarrow{v}^T)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}^T \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{w} =$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

— **Distributivité à droite** La commutativité et la distributivité à gauche impliquent la distributivité à droite.

— $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = (\lambda \overrightarrow{u})^T \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^T (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

— **Positivité** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 \geq 0$

Pour avoir une somme nulle, il faut que chaque terme soit nul : $u_j^2 = 0$ pour tout j. Autrement dit, $u_j = 0$ pour tout j.

Réciproquement, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.

□

Remarque 6.6.0.3. $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{v}_p) = \lambda_1 \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_2 + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_p$.

Définition 6.4 *Norme euclidienne*

La *norme* (euclidienne) d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est dit *unitaire* si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Exemples. 1. Pour $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

2. Pour $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ est unitaire car :

$$\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Remarque 6.6.0.5. *Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul, alors le vecteur*

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

est un vecteur unitaire.

Propriété 6.6

Si $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$$

Démonstration. On a

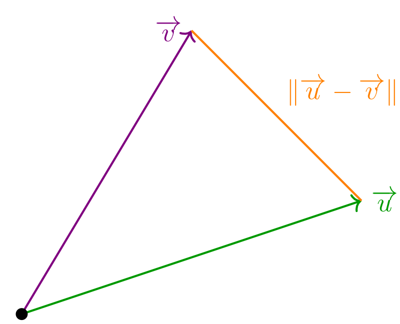
$$\begin{aligned}
\|\lambda\overrightarrow{u}\|^2 &= (\lambda\overrightarrow{u}) \cdot (\lambda\overrightarrow{u}) \\
&= \lambda(\overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{u})) \\
&= \lambda(\lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u})) \\
&= \lambda^2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) \\
&= \lambda^2\|\overrightarrow{u}\|^2
\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée des deux côtés, on obtient $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$. $\square$

Définition 6.7 *Distance entre vecteurs*

La *distance* entre deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathbb{R}^n$ est :

$$d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$$



6.3 Orthogonalité

Définition 6.8 *Vecteurs orthogonaux*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux* si :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

On note alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Remarques 6.6.0.9.

1. *Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.*
2. *L'orthogonalité généralise la notion de perpendicularité du plan et de l'espace à $\mathbb{R}^n$.*

Exemples.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 9 + 3 \cdot 1 = 6 - 9 + 3 = 0$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux :

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En effet : $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$ pour $i \neq j$.

Théorème 6.10 *Théorème de Pythagore*

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Démonstration. On développe $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \\ &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. □

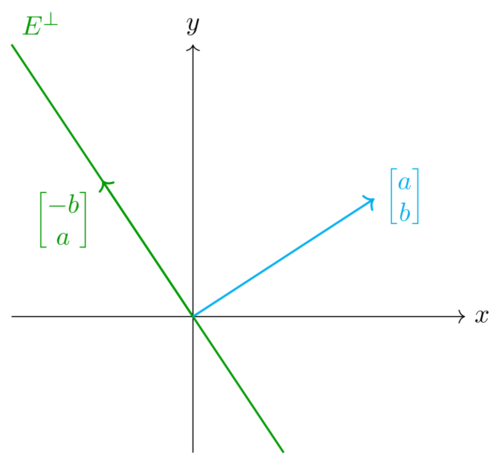
Définition 6.11 *Complément orthogonal*

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ est orthogonal à tous les vecteurs de E, alors on dit que $\overrightarrow{x}$ est orthogonal à E.
Le *complément orthogonal* de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à E.

$$E^\perp = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \,\forall \overrightarrow{v} \in E\}$$

Exemples. 1. $n = 2$: Si $E = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right\}$, alors

$$E^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\right\}$$



2. $n = 3$: Si $E = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right\}$, alors

$$E^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\right\}$$

C'est un plan de vecteur normal $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Propriété 6.12

Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Démonstration. 1. Le vecteur nul appartient à $E^\perp$: en effet, $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ pour tout $\overrightarrow{v} \in E$.

2. Soit $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2 \in E^\perp$. Alors pour tout $\overrightarrow{v} \in E$:

$$(\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{v} = 0 + 0 = 0$$

Donc $\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \in E^\perp$.

3. Soit $\overrightarrow{u} \in E^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\overrightarrow{v} \in E$:

$$(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Donc $\lambda \overrightarrow{u} \in E^\perp$.

Ainsi, $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. □

Propriété 6.13

Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors :

1. $W \subset (W^\perp)^\perp$
2. $W \cap W^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$

Démonstration. 1. Montrons que $W \subset (W^\perp)^\perp$. Soit $\overrightarrow{w} \in W$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in W^\perp$, on a par définition $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, donc $\overrightarrow{w} \in (W^\perp)^\perp$.

2. Montrons que $W \cap W^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$.

$\{\overrightarrow{0}\} \subset W \cap W^\perp$ car $\overrightarrow{0} \in W^\perp$ et $\overrightarrow{0} \in W$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{u} \in W \cap W^\perp$. Alors $\overrightarrow{u} \in W$ et $\overrightarrow{u} \in W^\perp$. Comme $\overrightarrow{u} \in W^\perp$, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ pour tout $\overrightarrow{v} \in W$. En particulier, en prenant $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$, on obtient :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

Par positivité du produit scalaire, cela implique $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Donc $W \cap W^\perp \subset \{\overrightarrow{0}\}$, et finalement $W \cap W^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$.

□

Remarque 6.6.0.14. *Nous verrons plus tard qu'en fait,* $W = (W^\perp)^\perp$.

Propriété 6.15

Soit $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $E = \{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k\}$ et $W = \text{Vect}\,(\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_k)$.

On a :

$$W^\perp = E^\perp$$

Autrement dit, $\overrightarrow{x} \in W^\perp \Leftrightarrow \overrightarrow{x}$ est orthogonal à un système de générateurs de W.

Démonstration. On va montrer $W^\perp \subset E^\perp$ et $E^\perp \subset W^\perp$, d'où l'égalité.

$W^\perp \subset E^\perp$ **:** Si $\vec{x} \in W^\perp$, alors $\vec{x} \cdot \vec{w} = 0$ pour tout $\vec{w} \in W$, d'où $\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, autrement dit, $\vec{x} \in E^\perp$.

$E^\perp \subset W^\perp$ **:** Si $\vec{x} \in E^\perp$, alors $\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$. Comme $W = \text{Vect}\,(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$, tout vecteur $\vec{w} \in W$ s'écrit :

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{w} &= \vec{x} \cdot (\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k) \\ &= \lambda_1(\vec{x} \cdot \vec{v}_1) + \ldots + \lambda_k(\vec{x} \cdot \vec{v}_k) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \ldots + \lambda_k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

d'où $\vec{x} \in W^\perp$. □

Propriété 6.16 $\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp.$$

Démonstration. On écrit $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$, de sorte que

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\,.$$

Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$,

$$A^T \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{x} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\vec{x} \in \text{Ker}(A^T) \iff A^T \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{a}_j \cdot \vec{x} = 0 \text{ pour tout } j.$$

Comme les $\vec{a}_j$ engendrent $\text{Im}(A)$, cela revient à dire que $\vec{x}$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im}(A)$, c'est-à-dire

$$\vec{x} \in (\text{Im}(A))^\perp.$$

On obtient donc $\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp$. □

Méthode 6.17 *Méthode pour déterminer $W^\perp$.*

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour trouver une base de $W^\perp$, il suffit d'appliquer la méthode suivante.

1. Trouver une base $(\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_k)$ de W.
2. Construire la matrice A de taille $k \times n$ dont les lignes sont les vecteurs $\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_k$. Par construction, $\mathrm{Lgn}(A) = W$. Comme $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_k\}$ est libre, on a $\mathrm{rang}(A) = k$.
3. Résoudre le système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ pour trouver $W^\perp = \mathrm{Ker}(A)$. Le théorème du rang nous donne $\dim(W^\perp) = n - k$.

Remarque 6.6.0.18. *Puisque les lignes de A sont les colonnes de A^T, $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Im}(A^T)$, et par la propriété 6.16, $\mathrm{Ker}(A) = (\mathrm{Im}(A^T))^\perp = (\mathrm{Lgn}(A))^\perp$.*

Donc, comme $\mathrm{Lgn}(A) = W$, on a bien $\mathrm{Ker}(A) = W^\perp$.

Exemple. Soit $W = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \subset \mathbb{R}^4$ où

$$\overrightarrow{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Déterminons une base de $W^\perp$.

Étape 1 : Base de W.
Les vecteurs $\overrightarrow{w}_1$ et $\overrightarrow{w}_2$ ne sont pas colinéaires, donc $(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2)$ est une base de W.

Étape 2 : Construction de la matrice A.
On construit la matrice A de taille 2×4 dont les lignes sont les vecteurs $\overrightarrow{w}_1$ et $\overrightarrow{w}_2$:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Par construction, $\mathrm{Lgn}(A) = W$ et $\mathrm{rang}(A) = 2$.

Étape 3 : Résolution du système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
On cherche $W^\perp = \mathrm{Ker}(A)$. Le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Échelonnons la matrice des coefficients :

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

Les variables libres sont x_3 et x_4. La solution générale est :

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $W^{\perp} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

6.4 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

Définition 6.19 *Ensemble orthogonal*

Un ensemble de vecteurs $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ dans $\mathbb{R}^n$ est dit *orthogonal* si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j} = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j$$

Si de plus chaque vecteur est unitaire ($\|\overrightarrow{u_i}\| = 1$ pour tout i), l'ensemble est dit *orthonormé*.

Exemples.

1. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ est orthogonal dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (3) = -12 + 12 = 0$$

2. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ est orthonormé dans $\mathbb{R}^3$.
3. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est orthogonal dans $\mathbb{R}^3$. Cependant, cet ensemble n'est pas linéairement indépendant à cause du vecteur nul.
4. Tout sous-ensemble de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthogonal.

Remarque 6.6.0.20. *Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ est orthogonal et que tous les vecteurs sont non nuls, alors $\left\{ \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|}, \frac{\overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_2}\|}, \ldots, \frac{\overrightarrow{u_k}}{\|\overrightarrow{u_k}\|} \right\}$ est orthonormé.*

Théorème 6.21 *Indépendance linéaire des vecteurs orthogonaux*

Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ est un ensemble orthogonal **de vecteurs non nuls** dans $\mathbb{R}^n$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Démonstration. Supposons que $c_1\overrightarrow{u_1} + c_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + c_k\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0}$.

En prenant le produit scalaire avec $\overrightarrow{u_i}$:

$$0 = \overrightarrow{u_i} \cdot (c_1\overrightarrow{u_1} + \ldots + c_k\overrightarrow{u_k}) = c_i(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_i}) = c_i\|\overrightarrow{u_i}\|^2$$

Comme $\overrightarrow{u_i} \neq \overrightarrow{0}$, on a $\|\overrightarrow{u_i}\|^2 > 0$, donc $c_i = 0$ pour tout i. □

Corollaire 6.22

Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$ est un ensemble orthogonal **de vecteurs non nuls** dans $\mathbb{R}^n$, alors c'est une base de $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$.

Définition 6.23 *Base orthogonale et orthonormée*

Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension k et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ une base de W. On dit que cette base est :

— *orthogonale* si $\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j} = 0$ pour $i \neq j$

— *orthonormée* si elle est orthogonale et $\|\overrightarrow{u_i}\| = 1$ pour tout i

Exemples. 1. La base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2. $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Cependant, cette base n'est pas orthonormée car $\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{2} \neq 1$.

3. $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 6.24 *Coordonnées dans une base orthogonale*

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$, les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_1}}{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1}}\overrightarrow{u_1} + \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_2}}{\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2}}\overrightarrow{u_2} + \cdots + \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_n}}{\overrightarrow{u_n} \cdot \overrightarrow{u_n}}\overrightarrow{u_n}$$

Si la base est orthonormée, la formule se simplifie :

$$\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_1})\overrightarrow{u_1} + (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_2})\overrightarrow{u_2} + \cdots + (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_n})\overrightarrow{u_n}$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\overrightarrow{w} = c_1\overrightarrow{u_1} + c_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{u_n}$$

Pour trouver le coefficient c_i, calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{u_i}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_i} &= (c_1\overrightarrow{u_1} + c_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{u_n}) \cdot \overrightarrow{u_i} \\ &= c_1(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_i}) + c_2(\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_i}) + \cdots + c_n(\overrightarrow{u_n} \cdot \overrightarrow{u_i})\end{aligned}$$

Puisque la base est orthogonale, on a $\overrightarrow{u_j} \cdot \overrightarrow{u_i} = 0$ pour tout $j \neq i$. Tous les termes s'annulent sauf celui correspondant à $j = i$:

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_i} = c_i(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_i})$$

D'où

$$c_i = \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_i}}{\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_i}}$$

Si la base est orthonormée, alors $\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_i} = \|\overrightarrow{u_i}\|^2 = 1$ pour tout i, donc la formule se simplifie en :

$$c_i = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_i}$$

□

Exemple. Soit la base orthogonale $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^2$.

Pour $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$, calculons ses coordonnées :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_1} &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 \\ \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} &= 1^2 + 1^2 = 2 \\ \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_2} &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot -1 = 2 \\ \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} &= 1^2 + (-1)^2 = 2\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{w} = \frac{8}{2}\overrightarrow{u_1} + \frac{2}{2}\overrightarrow{u_2} = 4\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$. Donc $[\overrightarrow{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$.

6.5 Projections orthogonales

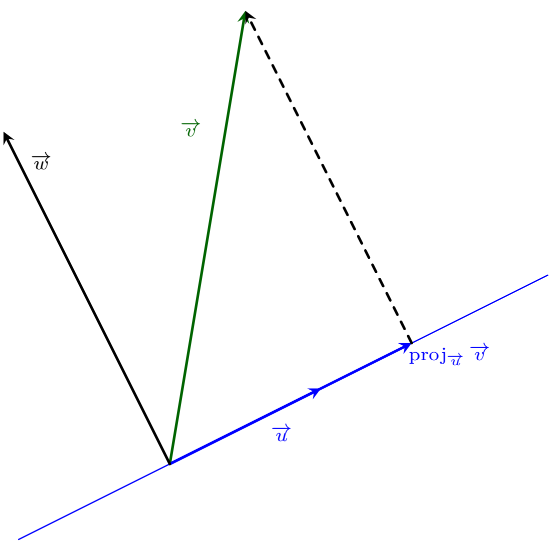
Définition 6.25 *Projection orthogonale sur un vecteur*

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. La *projection orthogonale* d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ sur $W = \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ est :

$$\text{proj}_W \overrightarrow{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}\overrightarrow{u}$$

Remarques 6.6.0.26. *1. La projection* $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$ *est le vecteur de la droite engendrée par* $\overrightarrow{u}$*, qui est le plus proche de* $\overrightarrow{v}$*.*

2. Le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}-\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{u}$*. Donc* $\overrightarrow{v}=\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ *est la somme d'un vecteur colinéaire à* $\overrightarrow{u}$ *et d'un vecteur orthogonal à* $\overrightarrow{u}$*.*



Exemples. Projetons $\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ sur $\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=3\cdot1+4\cdot2=11$$
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=1^2+2^2=5$$
$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}=\frac{11}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{5}\\\frac{22}{5}\end{bmatrix}$$

Vérifions que $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}-\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{11}{5}\\\frac{22}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{-2}{5}\end{bmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\frac{4}{5}\cdot1+\frac{-2}{5}\cdot2=\frac{4-4}{5}=0$$

Théorème 6.27

Soit $\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^n$ non nul, l'application $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}:\begin{array}{ll}\mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n\\ \overrightarrow{v} & \longmapsto \mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}\end{array}$ est linéaire.

Démonstration. La linéarité se montre en utilisant la linéarité du produit scalaire. □

Remarque 6.6.0.28. $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \in \vec{u}^{\perp}$ *donc* $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_{\vec{u}}) = \vec{u}^{\perp}$

Par ailleurs, $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ *est colinéaire à* $\vec{u}$ *pour tout* $\vec{v}$ *donc* $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\,(\vec{u})$.

Enfin, on a

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{1}{\vec{u}\cdot\vec{u}}(\vec{v}^T\vec{u})\vec{u} = \frac{1}{\vec{u}\cdot\vec{u}}(\vec{u}^T\vec{v})\vec{u} = \frac{1}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}(\vec{u}^T\vec{v})$$

car $\vec{u}^T\vec{v}$ *est un nombre réel.*

Donc $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{\vec{u}\cdot\vec{u}}(\vec{u}\,\vec{u}^T)\vec{v}$

Donc la matrice canoniquement associée à cette application linéaire est

$$A_{\mathrm{proj}_{\vec{u}}} = \frac{1}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\,\vec{u}^T = \frac{1}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\,\vec{u}^T.$$

Exemples. Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$.

On a $\vec{u}\cdot\vec{u} = 1^2 + 2^2 = 5$, donc

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{proj}_{\vec{u}}} &= \frac{1}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\,\vec{u}^T \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Image : Les colonnes de la matrice sont colinéaires, donc

$$\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\,(\vec{u})\,.$$

Par exemple, si $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$:

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}_1 = \frac{3+2}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{5}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \vec{u} \in \mathrm{Vect}\,(\vec{u})$$

Même calcul avec la matrice :

$$A_{\mathrm{proj}_{\vec{u}}}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3+2}{5}\\ \frac{6+4}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

De plus, si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}\lambda \\ 2\lambda\end{bmatrix}$ appartient déjà à Vect$\,(\overrightarrow{u})$, alors

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v} = \frac{\lambda+4\lambda}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \overrightarrow{v}$$

Donc la projection laisse donc invariants tous les vecteurs de Vect$\,(\overrightarrow{u})$.

Noyau : $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}) = \overrightarrow{u}^{\perp}$**.**

Un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ appartient à $\overrightarrow{u}^{\perp}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = x+2y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -2y$$

Donc $\overrightarrow{u}^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)$.

Vérifions avec $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} \in \overrightarrow{u}^{\perp}$:

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v}_2 = \frac{-2+2}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{0}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}})$.

Avec la matrice :

$$A_{\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}}\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-2+2}{5}\\ \frac{-4+4}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Plus généralement, pour tout $\overrightarrow{w} = t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} \in \overrightarrow{u}^{\perp}$ avec $t\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{w} = \frac{-2t+2t}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Décomposition orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Tout vecteur $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^2$ se décompose de manière unique en :

$$\overrightarrow{v} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v})$$

où $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{u}^{\perp}$.

Par exemple, avec $\overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$:

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\,\overrightarrow{v}_3 = \frac{5+6}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{11}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11}{5}\\ \frac{22}{5}\end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{11}{5}\\\frac{22}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{14}{5}\\\frac{-7}{5}\end{bmatrix} = \frac{7}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

On vérifie que $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \in \vec{u}^{\perp}$ car $2 + 2(-1) = 0$.

Ainsi :

$$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{11}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{\in \text{Vect}(\vec{u})} + \underbrace{\frac{7}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}}_{\in \vec{u}^{\perp}}$$

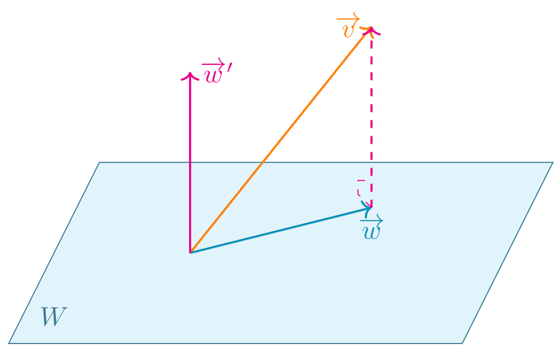
Remarque importante 6.29

Attention à ne pas confondre $\vec{u}^T\vec{u}$ qui est un réel, et $\vec{u}\,\vec{u}^T$ qui est une matrice de taille $n \times n$!

Soit maintenant $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $k \geq 2$. On aimerait écrire un vecteur arbitraire $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ comme la somme d'un vecteur $\vec{w} \in W$ et d'un vecteur $\vec{w}' \in W^{\perp}$:

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}'$$

Géométriquement :



Définition 6.30 *Projection orthogonale sur un sous-espace*

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$ et soit $(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k})$ une base orthogonale de W.
La *projection orthogonale* de $\vec{v}$ sur W est :

$$\text{proj}_W\,\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u_1}}{\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}}\,\vec{u_1} + \ldots + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u_k}}{\vec{u_k}\cdot\vec{u_k}}\,\vec{u_k}.$$

Exemples. Considérons $\mathbb{R}^3$ et le sous-espace

$$W = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; \overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que

$$\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1 + 1 + 0 = 0,$$

donc $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ est une base orthogonale de W.

Prenons

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nous allons calculer $\text{proj}_W \overrightarrow{v}$ avec la définition 6.30.

On commence par les produits scalaires :

$$\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2, \quad \overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_2 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2,$$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 5, \quad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2 = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \overrightarrow{v} &= \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\, \overrightarrow{u}_1 + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2}{\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_2}\, \overrightarrow{u}_2 \\ &= \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que le vecteur

$$\overrightarrow{v} - \text{proj}_W \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

est orthogonal à W.

Remarque 6.6.0.31. *Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ est orthonormée, alors*

$$\text{proj}_W \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1})\overrightarrow{u_1} + \ldots + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_k})\overrightarrow{u_k}.$$

Théorème 6.32 *Théorème de la projection orthogonale*

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$. Tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}' \quad \text{où } \overrightarrow{w} \in W \text{ et } \overrightarrow{w}' \in W^{\perp}$$

De plus, $\overrightarrow{w} = \operatorname{proj}_W \overrightarrow{v}$.

Démonstration. Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ est une base orthogonale de W.

Par définition de la projection, le vecteur $\overrightarrow{w} = \operatorname{proj}_W \overrightarrow{v}$ appartient à W car il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_k}$.

À voir : $\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \in W^{\perp}$.

Montrons que $\overrightarrow{w}' \cdot \overrightarrow{u_j} = 0$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w}' \cdot \overrightarrow{u_j} &= (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u_j} \\
&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_j} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u_j} \\
&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_j} - \left(\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1}}{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1}} \overrightarrow{u_1} + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2}}{\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2}} \overrightarrow{u_2} + \dots + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_k}}{\overrightarrow{u_k} \cdot \overrightarrow{u_k}} \overrightarrow{u_k} \right) \cdot \overrightarrow{u_j} \\
&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_j} - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_j}}{\overrightarrow{u_j} \cdot \overrightarrow{u_j}} (\overrightarrow{u_j} \cdot \overrightarrow{u_j}) - \sum_{i \neq j} \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_i}}{\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_i}} \underbrace{(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j})}_{=0} \\
&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_j} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que l'écriture est unique. Supposons qu'on a deux décompositions :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}'_1 = \overrightarrow{w}_2 + \overrightarrow{w}'_2 \quad \text{avec } \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2 \in W \text{ et } \overrightarrow{w}'_1, \overrightarrow{w}'_2 \in W^{\perp}$$

Cela implique que $\overrightarrow{w}_2 - \overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{w}'_1 - \overrightarrow{w}'_2$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}_2 - \overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{w}'_1 - \overrightarrow{w}'_2 \in W \cap W^{\perp}$

Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Or, on a les équivalences

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{w}_2 - \overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{w}'_1 - \overrightarrow{w}'_2 = \overrightarrow{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{w}_2 = \overrightarrow{w}_1 \\ \overrightarrow{w}'_2 = \overrightarrow{w}'_1 \end{cases}$$

□

Corollaire 6.33 $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W) = W$

Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$, alors :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W) = W.$$

Démonstration.

— $W \subset \mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W)$
Pour tout $\overrightarrow{w} \in W$, on a $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}$ (car $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{0} \in W^\perp$), donc $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W)$.

— $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W) \subset W$
Réciproquement, $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} \in W$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, donc $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W) \subset W$.

□

Corollaire 6.34 $(W^\perp)^\perp = W$

Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

Démonstration. Nous avons déjà montré $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Il reste à montrer $(W^\perp)^\perp \subset W$.

Soit donc $\overrightarrow{v} \in (W^\perp)^\perp \subset \mathbb{R}^n$.

Le théorème de la projection orthogonale nous donne :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}', \quad \text{avec } \overrightarrow{w} \in W \text{ et } \overrightarrow{w}' \in W^\perp.$$

Comme $\overrightarrow{w}' \in W^\perp$ et $\overrightarrow{v} \in (W^\perp)^\perp$, nous avons

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}' = 0.$$

Mais

$$0 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}' = (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}') \cdot \overrightarrow{w}' = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}' + \overrightarrow{w}' \cdot \overrightarrow{w}'.$$

Or $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}' = 0$ car $\overrightarrow{w} \in W$ et $\overrightarrow{w}' \in W^\perp$, donc

$$\overrightarrow{w}' \cdot \overrightarrow{w}' = 0.$$

Donc $\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{0}$, et donc

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \in W.$$

On a donc $(W^\perp)^\perp \subset W$, et finalement

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

□

Remarques 6.6.0.35. *1. L'unicité de la décomposition $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'$ montre que la projection $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}$ ne dépend que du sous-espace vectoriel W et non pas de la base (orthogonale) de W choisie.*

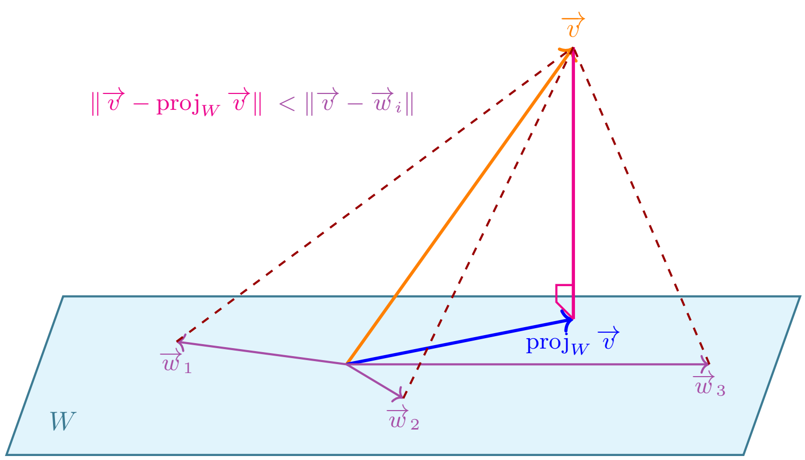
2. Si $\overrightarrow{v} \in W$, alors $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

Ceci nous donne un critère pratique pour caractériser l'appartenance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

Théorème 6.36 *Théorème de la meilleure approximation*

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.
Alors $\|\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}\| < \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|$ pour tout $\overrightarrow{w} \in W$ avec $\overrightarrow{w} \neq \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}$.

Autrement dit, $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}$ est la meilleure approximation de $\overrightarrow{v}$ par un élément de W.



Démonstration. On fixe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ et on note $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}$ sa projection sur W.

D'après le théorème de la projection orthogonale, on a

$$\overrightarrow{v} = \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}', \quad \text{avec } \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} \in W \text{ et } \overrightarrow{w}' \in W^{\perp}.$$

En particulier,

$$\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}' \in W^{\perp}.$$

Pour tout $\overrightarrow{w} \in W$, on a aussi

$$\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \in W,$$

puisque différence de deux vecteurs de W.

Ainsi, pour tout $\overrightarrow{w} \in W$,

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}) + (\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}),$$

où $\vec{v} - \operatorname{proj}_W \vec{v} \in W^\perp$ et $\operatorname{proj}_W \vec{v} - \vec{w} \in W$ sont orthogonaux.

Par le théorème de Pythagore, on obtient donc

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v} - \operatorname{proj}_W \vec{v}\|^2 + \|\operatorname{proj}_W \vec{v} - \vec{w}\|^2.$$

Si $\vec{w} \neq \operatorname{proj}_W \vec{v}$, alors $\operatorname{proj}_W \vec{v} - \vec{w} \neq \vec{0}$, donc

$$\|\operatorname{proj}_W \vec{v} - \vec{w}\|^2 > 0,$$

et par conséquent

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 > \|\vec{v} - \operatorname{proj}_W \vec{v}\|^2.$$

En prenant la racine des deux côtés, on obtient pour tout $\vec{w} \in W$ avec $\vec{w} \neq \operatorname{proj}_W \vec{v}$:

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| > \|\vec{v} - \operatorname{proj}_W \vec{v}\|.$$

Cela montre que $\operatorname{proj}_W \vec{v}$ est le vecteur de W le plus proche de $\vec{v}$. □

Cela motive la définition suivante.

Définition 6.37 *Distance d'un vecteur à un sous-espace*

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. On définit la *distance* entre $\vec{v}$ et W, notée $\operatorname{dist}(\vec{v}, W)$, par

$$\operatorname{dist}(\vec{v}, W) = \left\|\vec{v} - \operatorname{proj}_W \vec{v}\right\|$$

Exemple. Considérons $\mathbb{R}^3$ et le sous-espace

$$W = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{où} \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

C'est le plan (x, y), et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée de W.

Prenons

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

1. Projection de $\vec{v}$ sur W.

Comme W est engendré par une base orthonormée, on a

$$\operatorname{proj}_W \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2.$$

Or

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e}_1 = 1, \qquad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e}_2 = 2,$$

d'où

$$\text{proj}_W \overrightarrow{v} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc la décomposition orthogonale

$$\overrightarrow{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\in W^\perp}.$$

2. Distance de $\overrightarrow{v}$ à W.
Par définition,

$$\text{dist}(\overrightarrow{v}, W) = \|\overrightarrow{v} - \text{proj}_W \overrightarrow{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = 3.$$

3. Comparaison avec d'autres vecteurs de W.
Prenons par exemple deux vecteurs de W différents de $\text{proj}_W \overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}_1\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} > 3,$$

et

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}_2\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} > 3.$$

Donc parmi ces vecteurs de W, c'est bien

$$\text{proj}_W \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui est le plus proche de $\overrightarrow{v}$.

Exemple. Considérons $\mathbb{R}^3$ et le sous-espace

$$W = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que

$$\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0,$$

donc $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ est une base orthogonale de W (non orthonormée).

Prenons maintenant

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Projection de $\overrightarrow{v}$ sur W.

Comme la base de W est orthogonale, la définition 6.30 donne

$$\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1}{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1}\, \overrightarrow{u}_1 + \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2}{\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_2}\, \overrightarrow{u}_2.$$

On calcule les produits scalaires :

$$\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_1 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, \qquad \overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{u}_2 = 1^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2,$$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1, \qquad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0.$$

D'où

$$\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Distance de $\overrightarrow{v}$ à W.

La définition de la distance donne

$$\mathrm{dist}(\overrightarrow{v}, W) = \|\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\|.$$

On a

$$\|\overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v}\|^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

donc

$$\mathrm{dist}(\overrightarrow{v}, W) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Théorème 6.38

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$. L'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{proj}_W : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \vec{v} & \longmapsto & \mathrm{proj}_W \vec{v} \end{array}$ est linéaire.

Démonstration. De même que pour la projection sur une droite, la linéarité se montre en utilisant la linéarité du produit scalaire. □

Théorème 6.39 $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_W) = W^\perp$

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$. On a $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_W) = W^\perp$

Démonstration. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W \vec{v} = \vec{0} &\iff \frac{\vec{v}\cdot\vec{u_1}}{\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}}\vec{u_1} + \cdots + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u_k}}{\vec{u_k}\cdot\vec{u_k}}\vec{u_k} = \vec{0} \\ &\iff \vec{v}\cdot\vec{u_j} = 0 \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,k\} \text{ car les } u_j \text{ constituent une base de } W \\ &\iff \vec{v} \in W^\perp \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_W) = W^\perp$. □

Comme d'autre part, $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W) = W$ d'après le corollaire 6.33, le théorème du rang nous donne donc que pour tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$,

$$\dim(W^\perp) = n - \dim(W).$$

C'est aussi vrai pour $W = \{\vec{0}\}$.

Par construction,

— si $\vec{v} \in W$, alors $\mathrm{proj}_W \vec{v} = \vec{v}$. Ainsi $\vec{v}$ est un vecteur propre de proj_W de valeur propre associée $\lambda = 1$;

— si $\vec{v} \in W^\perp$, alors $\mathrm{proj}_W \vec{v} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{v}$ est un vecteur propre de proj_W de valeur propre associée $\lambda = 0$.

Soit $\left(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_k\right)$ une base de W (pas forcément orthogonale) et soit $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-k}\}$ une base de $W^\perp$ (pas forcément orthogonale). L'ensemble

$$\mathcal{B} = \left(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_k,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-k}\right)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de proj_W par rapport à la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$A^{\mathcal{B}}_{\mathrm{proj}_W} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} k \text{ fois} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \ddots\\ 0\end{matrix}}\right\} n-k \text{ fois} \end{array}$$

Théorème 6.40 *Matrice canoniquement associée à* proj_W

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$ et $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$ une base orthonormée de W. On note

$$U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_k \end{bmatrix}.$$

Alors, la matrice canoniquement associée à proj_W est UU^T.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons énoncer et démontrer un théorème utile :

Théorème 6.41

Soit $U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ Les n colonnes de U sont orthonormées si et seulement si

$$U^T U = I_n.$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$

Par définition du produit matriciel, l'élément de la i-ème ligne et j-ème colonne de $U^T U$ est

$$(U^T U)_{ij} = \vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j.$$

Comme les colonnes de U sont orthonormées. Alors

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

Donc $U^T U = I_n$.

$(\Leftarrow)$

Réciproquement, supposons que $U^T U = I_n$. Alors, pour tous i, j,

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = (U^T U)_{ij} = (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

Donc $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ si $i \neq j$ et $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$ pour tout i, ce qui signifie que les colonnes de U sont orthonormées. □

Démonstration. du théorème 6.40

Comme $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$ est une base de W et

$$U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_k \end{bmatrix},$$

nous avons $W = \mathrm{Im}(U)$, car $\mathrm{Im}(U)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de U.

Par conséquent (propriété 6.16),

$$W^\perp = (\mathrm{Im}(U))^\perp = \mathrm{Ker}(U^T).$$

Le théorème 6.32 de la projection orthogonale nous dit que tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{v} = \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}', \quad \text{où } \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} \in W \text{ et } \overrightarrow{w}' \in W^\perp.$$

Comme $\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} \in W = \mathrm{Im}(U)$, on a

$$\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} = U\overrightarrow{x} \quad \text{pour un certain } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^k.$$

Comme $\overrightarrow{w}' \in W^\perp = \mathrm{Ker}(U^T)$, on a

$$U^T\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{0}.$$

Ainsi,

$$U^T\overrightarrow{v} = U^T(\mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}') = U^T \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} + U^T\overrightarrow{w}' = U^TU\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0},$$

d'où

$$U^T\overrightarrow{v} = U^TU\overrightarrow{x}.$$

Comme les k colonnes de U forment un ensemble orthonormé, on a

$$U^TU = I_k,$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{x} = U^T\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u}_1^T\overrightarrow{v} \\ \vdots \\ \overrightarrow{u}_k^T\overrightarrow{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_k \end{bmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W \overrightarrow{v} &= U\overrightarrow{x} \\ &= (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_1)\overrightarrow{u}_1 + \cdots + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_k)\overrightarrow{u}_k \\ &= U\big(U^T\overrightarrow{v}\big) \\ &= (UU^T)\,\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

□

Remarque importante 6.42

Attention à ne pas confondre UU^T et U^TU !